

Задаци за вежбу 3

задаци за домаћи обележени су *

1. * Нека су $f : X \rightarrow X$ и $g : Y \rightarrow Y$ динамички системи на компактним метричким просторима. Претпоставимо да је g фактор система f . Доказати да важи

$$h_{\text{top}}(g) \leq h_{\text{top}}(f).$$

2. * Нека је $f : X \rightarrow X$ динамички систем на компактном метричком простору.

(a) Доказати да важи

$$h_{\text{top}}(f^k) = k \cdot h_{\text{top}}(f), \quad \forall k \geq 1.$$

(b) Сада претпоставимо да је f реверзибилан. Доказати да важи

$$h_{\text{top}}(f^{-1}) = h_{\text{top}}(f),$$

и из тога закључити да важи следеће:

$$h_{\text{top}}(f^k) = |k| h_{\text{top}}(f), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

3. * Овај задатак конструише пример динамичког система са бесконачном тополошком ентропијом.

a) Нека је

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

динамички систем дефинисан са

$$f(x) := \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 2 - 3x, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 3x - 2, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Докажите да важи

$$h_{\text{top}}(f) = \log 3.$$

б) Нека је

$$I_k := [2^{-k}, 2^{-(k-1)}],$$

и дефинишимо хомеоморфизме

$$H_k : I_k \rightarrow [0, 1], \quad H_k(x) := 2^k x - 1.$$

Посматрајмо нови динамички систем $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ дефинисан са $g(0) = 0$ и

$$g(x) := H_k^{-1} \circ f^k \circ H_k, \quad \text{за } x \in I_k.$$

Доказати да је g непрекидна и да је $h_{\text{top}} = \infty$.

4. * Нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ транзитиван динамички систем.

a) Докажите да постоји фиксна тачка a пресликавања f таква да $0 < a < 1$.

б) Доказати да је слика нетривијалног интервала при пресликавању f поново нетривијалан интервал.

в) Доказати да је f сурјективно.